Mátemática Discreta y Álgebra Lineal

Álgebra

1. Responde verdadero o falso **razonadamente** a las siguientes afirmaciones:

   (a) Un sistema con dos ecuaciones lineales y tres incógnitas cuyos coeficientes no son todos nulos es siempre compatible indeterminado

   (b) Teniendo un sistema generador de un subespacio vectorial, con pocos cálculos, puedo saber la dimensión de ese subespacio vectorial.

   (c) Sea $H = \{A \in M_{nxn}/det(A) \neq 0\}$. La función $f : H \to H$ que a cada matriz le hace corresponder su inversa es lineal.

   (d) Es imprescindible encontrar una base ortonomal en un espacio vectorial euclídeo para poder calcular la norma de cualquier vector del espacio.

   (e) Si A es diagonalizable, y A es semejante a B, entonces B también es diagonalizable.

2. Discutir, en función de a, el sistema: $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ -ax+y+z+t=2 \\ x-ay+z+t=3 \\ x+y-az+t=4 \\ x+y+z-at=5 \end{cases}$

3. (a) Determinar los valores de a y b, si es que existen, para que

$$L = [(a,1,-1,2),(1,b,0,3)] = L[(1,-1,1,-2),(-2,0,0,-6)]$$

   (b) En el espacio vectorial real $M_{2x2}(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$W_1 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R})/a+b+c+d=0\}$$

$$W_2 = L[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]$$

   Calcular una base y la dimensión de ambos subespacios vectoriales. Calcular las ecuaciones implícitas de ambos subespacios.

   (c) En $\mathbb{R}^4$ se considera el subespacio vectorial

$$W_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4/x-y+3z=0, x+y-2z+2t=0\}$$

   Demuestra que es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ y extiende una base de W_1 a una base de $\mathbb{R}^4$.

4. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f((-1,1,3)) = (6,-4,16), f((-2,1,1)) = (-2,-5,1)$ y $f((3,2,-1)) = (1,14,-12)$.

   (a) Calcular la matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}$.

   (b) Calcular una base del núcleo y de la imagen.

   (c) Decide si es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. Justifica tu respuesta.

5. (a) Calcular un conjunto ortonormal a partir del conjunto de vectores de $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual:

$$B = \{u_1,u_2,u_3,u_4\} = \{(2,1,0,2),(2,-2,1,0),(1,1,1,1),(5,0,2,3)\}$$

   (b) Calcular la proyección ortogonal sobre el espacio vectorial generado por $\{u_1,u_2,u_3\}$ del vector w donde: $w = (5,0,2,3)$

6. Calcular, en función de m, cuando la siguiente matriz es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & m & 8 \\ 2 & 8 & m \end{pmatrix}$$

   Para $m = 0$, calcula la descomposición $A = QDQ^{-1}$.